Propiedades de las funciones de red.

I. Todas las funciones de red son func. racionales de p con coef. reales y positivos.
II. Diagrama de polos y ceros simétrico respecto al eje real
III. nº polos= nº ceros, incluyendo singularidades en el infinito
IV. par [H(p)] es par; impar[H(p)] es impar; |H(jw)| es par; argumH(jw) es impar
V. Estabilidad=>polos en SPI (Si Re(p_k)=0 => multiplicidad=1)
VI. gº Mº numerador no puede ser ≥ gº Mº denominador +1
VII. gº mº denominador no puede ser ≥ gº mº del numerador +1

Propiedades de las adpedancias

1. Polos y ceros en el SPI. Si tienen parte real nula=>multiplicidad=1
2. Estabilidad en circuito abto. y cortocircuito: cc=> Re(z_k)≤0; ca=> Re(p_k)≤0 para impedancia; al revés admitancia
3. $\mathrm{Re}[A(p)]|_{p=jw} \geq 0$
4. $Z_{kl} = R_{kl} + \dfrac{1}{pC_{kl}} + pL_{kl}$; $R_{kl}, C_{kl}, L_{kl} \in \Re^+$

   Real: H(p) real sii Im(p)=0 => Im(H(p))=0;
   Positiva: H(p) positiva sii Re(p)>0 => Re(H(p))>0
5. H(p) real y positiva

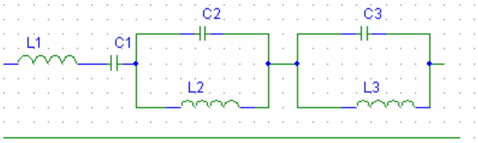
Adpedancias LC. Propiedades

1. $[\mathrm{Re}\, A(p)_{LC}]_{p=jw}=0$
2. Red LC no consume energía por periodo
3. Una adpedancia LC no tiene componente resistiva
4. Tanto grados m^os^ como M^os^ del numerador y denominador se diferencian en una unidad
5. Son estables por ser adpedancias y por los grados
6. Los polos de LC son imaginarios puros y simples
7. Tanto en el ∞ como en el origen hay un polo o un cero
8. Los residuos de LC son reales y positivos ∀ polo
9. Toda $A(p)_{LC}$ es reactancia (sii p=jw => f(jw)=jX(w))
10. Polos y ceros se alternan en el eje imaginario
11. Origen: polo ó cero

Síntesis Foster

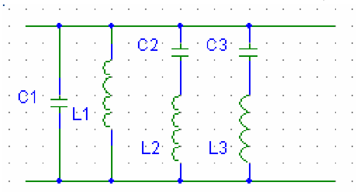
1ª) Dividir si se puede

$$Z(p) = A_\infty p + \frac{A_0}{p} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k p}{p^2+\omega_k^2}$$; $Z_k(p) \Rightarrow 1/Z_k(p)$



2ª) Dividir si se puede

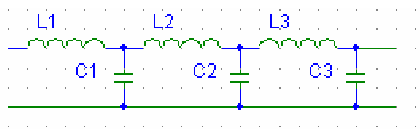
$$Y(p) = B_\infty p + \frac{B_0}{p} + \sum_{k=1}^{N} \frac{B_k p}{p^2+\omega_k^2}$$; $Y_k(p) \Rightarrow 1/Y_k(p)$



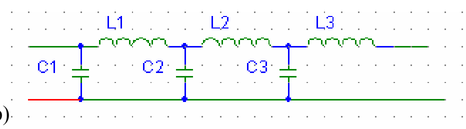
Cauer: Si y sólo si polo en origen ó ∞

1ª) Si polo en ∞. Divido, invierto, divido,... (algoritmo de Euclides)

$$A(p) = A_1 p + \cfrac{1}{A_2 p + \cfrac{1}{A_3 p + \cfrac{1}{\cdots}}}$$



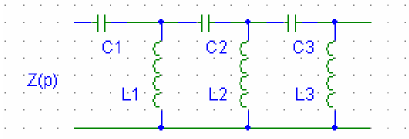
Z(p)

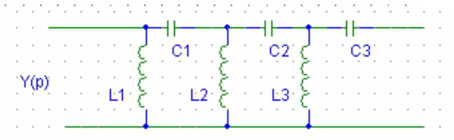


Y(p)

2ª) Si polo en origen. Euclides invertido (grados mínimos)

$$A(p) = \frac{A_1}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{A_2}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{A_3}{p} + \cfrac{1}{\cdots}}}$$





Adpedancias RC Propiedades

1. $[\mathrm{Re}(A(p)_{RC}]_{p=jw}>0$
2. gº Mº num. impedancia RC es igual o inferior al gº Mº denom.
   gª Mº denom admitancia RC es igual o inferior al gº Mº del numerador
3. gº mº denominador impedancia igual o mayor en 1 que gº mº numerador
   gº mº numerador admitancia es igual o mayor en 1 que gº mº denominador
4. Polos y ceros son reales y negativos
5. Pendiente de Z(σ)=Z(σ, ω→0) es negativa ⇒ polos y ceros alternados
6. Z_{RC} no tendrá polo en ∞, ni cero en origen; Y_{RC} no tendrá polo en origen, ni cero en ∞. (Pueden no tener nada)

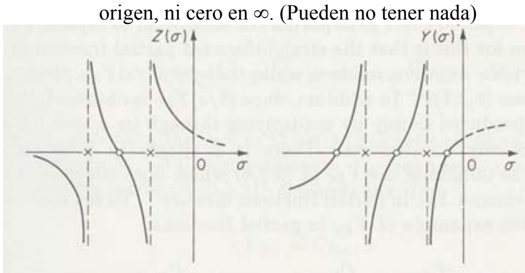


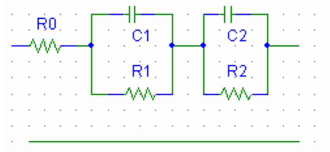
Fig. 3.3.8. Typical behavior of Z_{RC} and Y_{RC} versus σ.

El elemento más cercano al eje en Z_{RC} es siempre un polo (cero en Y_{RC}).

Síntesis Foster

1ª)

$$Z(p) = A_0 + \sum_k \frac{A_k}{p+\lambda_k}; A_k \in \Re^+$$ $A_0=R_0$; $Z_k \Rightarrow 1/Z_k$

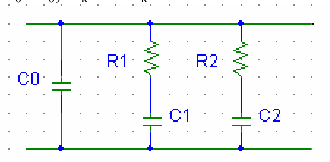


2ª)

$$Z(p) = A_0 + \sum_k \frac{A_k}{p+\lambda_k}; \frac{Y(p)}{p} = B_0 + \sum_k \frac{B_k}{p+\beta_k};$$

$$Y(p) = pB_0 + \sum_k \frac{B_k p}{p+B_k}$$

$B_0=C_0$; $Y_k \Rightarrow 1/Y_k$

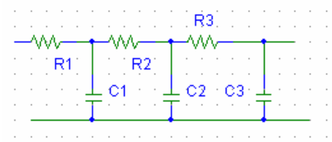


Cauer

1ª especie

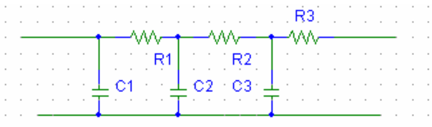
I. Si gº Mº num = gºMº denom⇒uso Z(p)
   Divido, invierto y divido (algoritmo Euclides)
   $Z(p)=A_0+Z_0(p)$; $1/Z_0(p)$ y divido

$$Z(p)=A_0+\cfrac{1}{A_1p+\cfrac{1}{A_2+\cfrac{1}{A_3p+\cfrac{1}{\dots}}}}$$



II. Si gº Mº num≠gºMº denom⇒uso Y(p)
   Y(p) divido⇒$Y(p)=B_0p+Y_0(p)$ ⇒$1/Y_0(p)$ y divido

$$Y(p)=B_0p+\cfrac{1}{B_1+\cfrac{1}{B_2p+\cfrac{1}{B_3+\cfrac{1}{\dots}}}}$$

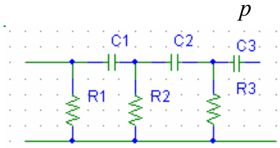


2ª especie

I. gº mín denom=gº mín num⇒usaré Y(p) con grados mínimos y algoritmo de Euclides.

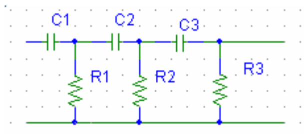
   $Y(p)=A_0+Y_0(p) \Rightarrow \dfrac{1}{Y_0}=\dfrac{A_1}{p}+Z_1(p)$;

$$Y(p)=A_0+\cfrac{1}{\cfrac{A_1}{p}+\cfrac{1}{A_2+\cfrac{1}{\cfrac{A_3}{p}+\cfrac{1}{\dots}}}}$$



II. gº mín denom ≠ gº mín num⇒ usaré Z(p), dividiendo por grados mínimos
   $Z(p)=A_0/p+Z_0(p)$; Ahora $Z_0(p)$ grados iguales⇒$1/Z_0(p)$ y gºˢ mínimos

$$Z(p)=\frac{A_0}{p}+\cfrac{1}{A_1+\cfrac{1}{\cfrac{A_2}{p}+\cfrac{1}{A_3+\cfrac{1}{\dots}}}}$$



Adpedancias RL

En general, igual que RC, cambiando

$Z(p)_{RC} \Rightarrow Y(p)_{RL}$

$Y(p)_{RC} \Rightarrow Z(p)_{RL}$

Conceptos básicos de filtros

De puerta Inmitancias $\left\{ \begin{array}{l} \text{(adpedancias)} \\ \text{De transferencia } \dfrac{V_2(p)}{V_1(p)}; \dfrac{V_2(p)}{I_1(p)}; \dfrac{I_2(p)}{I_1(p)} \end{array} \right.$

Filtro: función de transferencia en tensión de una red bipuerta que tranf. La tensión de entrada $v_1(t)$ en $v_2(t)$ mediante $T(p)=v_2(p)/v_1(p)$

Filtro modifica la forma de onda de entrada a la salida

- Filtros RLC o activos (A.O.)
- Son func. reales pero no positivas
- Funciones racionales de p

Pasa baja, pasa alta, pasa banda, elimina banda

Factor Q $Q=\dfrac{\omega_c}{\Delta\omega}=\dfrac{\omega_c}{\omega_2-\omega_1}$;Retardo de fase $\Delta t=-\dfrac{\theta(\omega)}{\omega}$;Retardo de grupo $\tan(\omega)=-\dfrac{d\theta}{d\omega}$ Desnormalizar $p \to \dfrac{p}{\omega_0}; \omega_0=2\pi f_0$

Filtro de Butterworth

Butterworth: aproximación máximamente plana.

Síntesis Butterworth.

$$|T'(j\omega)|^2=\frac{1}{1+F(\omega^2)}; F(\omega^2)=\begin{cases} 0 & 0<\omega<1 \\ \infty & \omega>1 \end{cases}$$

Aprox. Butterworth:

$$F(\omega^2)\cong\omega^{2N}; F(\omega^2)=\lim_{N\to\infty}\omega^{2N}; F(\omega^2)=\begin{cases} \lim\limits_{N\to\infty}\omega^{2N} & 0<\omega<1 \\ \lim\limits_{N\to\infty}\omega^{2N} & \omega>1 \end{cases}$$

$$\boxed{|T(j\omega)|^2=\frac{1}{1+\omega^{2N}}}$$

Función de transferencia de orden N para un filtro pasa-baja de Butterworth

N	**Polin. Denominador T(p)**
1	$p+1$
2	$p^2+\sqrt{2}p+1$
3	p^3+2p^2+2p+1
4	$p^4+2{,}1631p^3+3{,}144p^2+2{,}6131p+1$

Coef. Butterworth (Sólo el de p. Los de p^2 y p^0 valen 1)

N	2	4	6	8	10
b1	1,414213	0,765367	0,517638	0,390180	0,312869
b1		1,847759	1,414213	1,111140	0,907981
b1			1,931851	1,662939	1,414213
b1				1,961570	1,782013
b1					1,975376

$$\left[|T(j\omega)|\right]^2_{\omega=\frac{p}{j}}=T(p)T(-p); \frac{1}{1+\left(\frac{p}{j}\right)^{2N}}=T(p)T(-p)$$

$$1+\left(\frac{p}{j}\right)^{2N}=0 \Rightarrow \left(\frac{p}{j}\right)^{2N}=-1 \Rightarrow p^{2N}=e^{j\pi}e^{j\frac{\pi}{2}2N}$$

$$\left.\begin{array}{l} p=e^{j\pi\frac{1+N+2k}{2N}} \\ \varphi_k=\pi\dfrac{1+N+2k}{2N} \end{array}\right\} \text{Asignar polos}$$

Filtros de Tchebychev

Rizado constante en banda pasante, caída más abrupta.

$F(\omega^2)=\lim\limits_{N\to\infty}\varepsilon^2C_N^2(\omega)$ $C_N^2(w)$: polinomios de Tchebyshev de grado N; $1\geq\varepsilon\geq0$

$$|T(j\omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2C_N^2(w)}\begin{cases} \omega\leq1 \Rightarrow & C_N(\omega)=\cos\left[N\cos^{-1}\omega\right] \\ \omega>1 \Rightarrow & C_N(\omega)=\cosh\left[N\cosh^{-1}\omega\right] \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} N=0 & \Rightarrow & C_0(\omega)=1 \\ N=1 & \Rightarrow & C_1(\omega)=\omega \\ N=2 & \Rightarrow & C_2(\omega)=\cos\left[2\cos^{-1}\omega\right]=\dots=2\omega^2-1 \\ N=3 & \Rightarrow & C_3(\omega)=4\omega^3-3\omega \end{array}$$

$$\omega=1 \Rightarrow \left|T(j\omega)\right|_{\omega=1}=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

$$\omega = 0 \quad ORDENPAR \quad |T(j\omega)|_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

$$ORDENIMPAR \quad |T(j\omega)|_0 = 1$$

Aparecen tantas oscilaciones en la banda pasante como orden del filtro. Usa los polinomios de Chebychev.

Cálculo T(p)

Parto de

$$\left[|T(j\omega)|\right]^2_{\omega=\frac{p}{j}} = T(p)T(-p) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{p}{j}\right)}$$

Saco α y β, que me permite obtener los polos de T(p)T(-p), de la forma p=σ+jω. Luego asigno polos a T(p) y T(-p)

$$\sigma = \sin\alpha \sinh\beta \qquad \alpha = \frac{(2n+1)}{N}\frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \cos\alpha \cosh\beta \qquad \beta = \frac{1}{N}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{\delta}{10}}-1}; \delta = 10\log\left(1+\varepsilon^2\right)$$

Los polos forman una elipse $\frac{\sigma^2}{\sinh^2\beta} + \frac{\omega^2}{\cosh^2\beta} = 1$

Coef. Chebyshev pasa-baja rizado 1 dB ($b2=>p^2$; b1=>p)

N	2	4	6	8	10
b2	0,907021	1,013679	1,009354	1,005894	1,003957
b1	0,995668	0,282889	0,125525	7,0429e-2	4,500e-2
b2		3,579122	1,793016	1,382088	1,227863
b1		2,411396	0,609201	0,275574	0,159743
b2			8,018803	2,933762	1,921118
b1			3,721731	0,875459	0,389282
b2				14,23260	4,412333
b1				5,009828	1,126613
b2					22,22130
b1					6,289486

Filtros de Bessel

Sistema en el que el retardo es constante para toda w. Se parte de una red ideal de retardo y se aproxima mediante una función racional. Función de transferencia de la forma:

$T(p) = \frac{1}{D_N(p)}$, con $D_N(p)$ polinomio de Bessel orden N.

$D_0=1$; $D_1=p+1$; $D_2=p^2+3p+3$; $D_3=p^3+6p^2+15p+15$;
$D_4=p^4+10p^3+45p^2+105p+105$; …; $D_{N+1}(p)=(2N+1)D_N(p)+p^2D_{N-1}(p)$

Sensibilidad de los filtros

$$S_x^Q = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{Q}\frac{\Delta Q}{\Delta x}$$ Pasando al límite $$S_x^Q = \frac{x}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial[\ln Q]}{\partial[\ln x]}$$

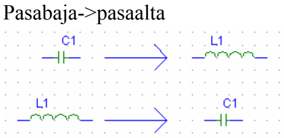
Transformaciones en frecuencia

Filtro pasa-baja->transf. Conforme->función transferencia de otro filtro

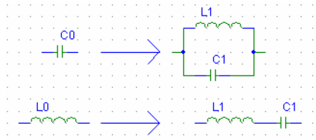
Pasabaja->Pasa alta	Pasabaja->Pasa banda	Pasabaja->Eliminabanda
$p = \frac{1}{\bar{p}}$ $T(p) = \frac{ap^2}{p^2+b_1p+b_0}$ (orden 2)	$p = Q\left(\bar{p}+\frac{1}{\bar{p}}\right)$ $T(p) = \frac{ap}{p^2+b_1p+b_0}$ (orden 2)	$p = \frac{1}{Q\left(\bar{p}+\frac{1}{\bar{p}}\right)}$ $T(p) = \frac{p^2+a}{p^2+b_1p+b_0}$ (orden 2)

Transf. Elementos.

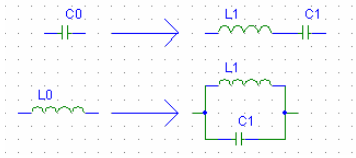
Pasabaja->pasaalta



Pasabaja->pasabanda



Pasabaja->eliminabanda



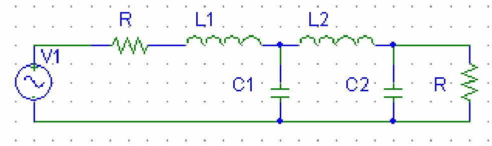
Realización de filtros pasivos

Se emplean para altas frecuencias o frecuencias de audio en etapas de potencia. Básicamente, disponen de tantos elementos reactivos como el orden del filtro. Se parte del filtro pasa baja y se realizan transf. En frec. De los elementos para obtener los diversos tipos de filtros. Estrictamente, se extraería la func. de transf. del circuito y se igualarían los coeficientes a los de la función del filtro que buscamos (Butterworth, Tchebyshev,...).

Normalización: (en fnc. Transf.. dividir por w_c)

Magnitud	Unidad
Impedancia	R
Pulsación	$2\pi f_0$
Tiempo	$1/2\pi f_0$
Capacidad	$1/2\pi f_0 R$
Autoinducción	$R/2\pi f_0$

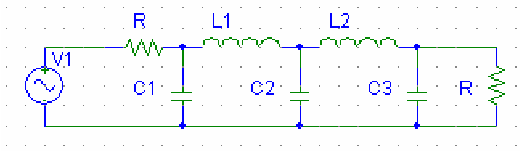
Filtro pasa baja orden 4:



Valores normalizados de comp. para filtro de Butterworth:

Componente	Valor normalizado
C1	1,84776
C2	0,76536
L1	0,76536
L2	1,84776

Filtro pasa-baja orden 5:



Valores normalizados comp.. para filtro Chebyshev:

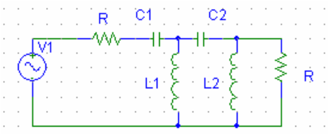
δ(dB)	C1	C2	C3	L1	L2
0,5	1,70577	2,54082	1,70577	1,22962	1,22962
1	2,13488	3,00092	2,13488	1,09111	1,09111
1,5	2,49559	3,40166	2,49559	0,98496	0,98496

Valores normalizados comp.. para filtro Butterworth:

Componente	Valor normalizado
C1	0,60075
C2	1,99903
C3	0,63633
L1	1,58955
L2	1,64646

Mediante transformaciones en frecuencia, se obtienen los demás filtros.

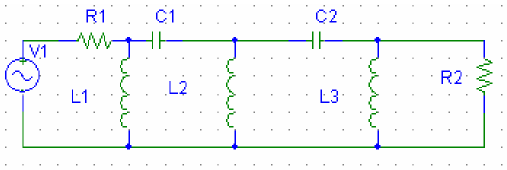
Pasa alta orden 4:



Valores normalizados de comp. para filtro de Butterworth:

Componente	Valor normalizado
C1	1,30657
C2	0,54119
L1	0,54119
L2	1,30657

Pasa alta orden 5:



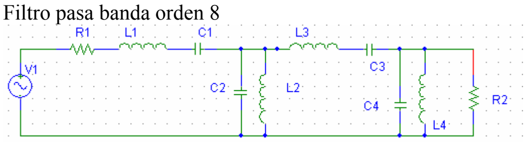
Valores normalizados comp.. para filtro Chebyshev:

δ(dB)	L1	L2	L3	C1	C2
	0,5862	0,3935	0,5862	0,8132	0,8132
1	0,4684	0,3333	0,4684	0,9165	0,9165
1,5	0,4007	0,2939	0,4007	1,0152	1,0152

Valores normalizados comp. para filtro Butterworth:

Componente	Valor normalizado
L1	1,6646
L2	0,5000
L3	1,5715
C1	0,6291
C2	0,6073

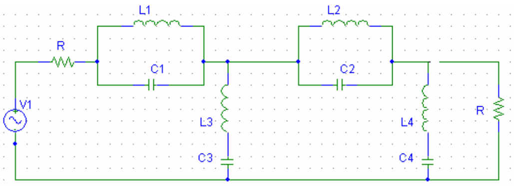
Filtro pasa banda orden 8



Valores normalizados de comp. para filtro de Butterworth según Q:

Componente	Valor normalizado
L1	0,7653Q
L2	1/1,8477Q
L3	1,8477Q
L4	1/0,7653Q
C1	1/0,7653Q
C2	1,8477Q
C3	1/1,8477Q
C4	0,7653Q

Filtro elimina-banda orden 8



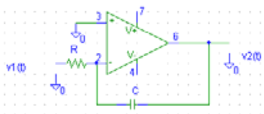
Valores normalizados de comp. para filtro de Butterworth según Q:

Componente	Valor normalizado
L1	0,7653/Q
L2	1,8477/Q
L3	Q/1,8477
L4	Q/0,7653
C1	Q/0,7653
C2	Q/1,8477
C3	1,8477/Q
C4	0,7653/Q

Realización de funciones de transferencia

Circ. desenergetizado⇒puedo cambiar p por d/dt⇒ ecuaciones diferenciales.
Las puedo implementar por bloques activos.

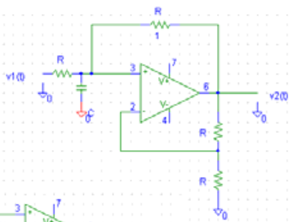
Integrador inversor:



$$v_2(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t v_1(t)dt$$

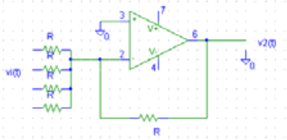
Integrador no inversor:

$$v_2(t) = \frac{2}{RC}\int_0^t v_1(t)$$

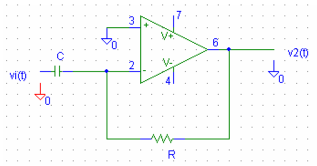


Sumador inversor:

$$v_2(t) = \sum -\frac{R}{R_i} v_i(t)$$

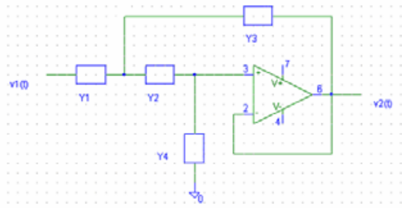


Derivador



$$v_2(t) = -RC\frac{dv_1(t)}{dt}$$

Síntesis activa
Sallen Key (gan=0dB)



$$T(p) = \frac{v_2(p)}{v_1(p)} = \frac{Y_1Y_2}{Y_1Y_2 + Y_1Y_4 + Y_3Y_4 + Y_2Y_4}$$

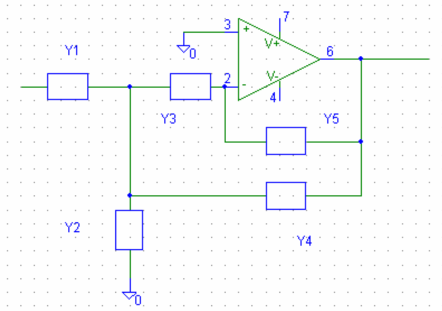
Pasa baja orden 2:
$Y_1=1/R_1$; $Y_2=1/R_2$; $Y_3=pC_3$; $Y_4=pC_4$

$$H(p) = \frac{1}{R_1R_2C_3C_4p^2 + (R_1+R_2)C_4p + 1}$$

Pasa alta orden 2:
$Y_1= pC_3$; $Y_2= pC_4$;$Y_3=1/R_1$; $Y_4=1/R_2$

$$H(p) = \frac{R_1R_2C_3C_4}{R_1R_2C_3C_4p^2 + (C_3+C_4)R_1p + 1}$$

Célula de Rauch



$$T(p) = \frac{v_2(p)}{v_1(p)} = \frac{-Y_1Y_3}{Y_5(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4) + Y_3Y_4}$$

Filtro pasa baja orden 2:
$Y_1=1/R_1$; $Y_2=pC_2$; $Y_3=1/R_3$; $Y_4=1/R_4$; $Y_5=pC_5$

$$H(p) = \frac{\frac{R_4}{R_1}}{R_4R_3C_5C_2p^2 + \left(\frac{R_4R_3}{R_1} + R_4 + R_3\right)C_5p + 1}$$

Pasa alta orden 2:
$Y_1=C_1p$; $Y_2=1/R_2$; $Y_3=C_3p$; $Y_4=C_4p$; $Y_5=1/R_5$

$$H(p) = \frac{\frac{C_1}{C_4}R_5R_2C_4C_3p^2}{R_5R_2C_4C_3p^2 + (C_1+C_3+C_4)R_2p + 1}$$